Corps stables

Cédric Milliet

CORPS STABLES

CÉDRIC MILLIET

RÉSUMÉ. On y montre qu'un corps stable de caractéristique positive est de dimension finie sur son centre, puis on généralise la chose aux corps simples.

Macintyre a montré qu'un corps ω-stable commutatif était fini ou algébriquement clos [8], résultat généralisé aux corps superstables par les soins de Cherlin et Shelah [3]. Il s'en suit qu'un corps superstable est nécessairement commutatif [2]. Pillay, Scanlon et Wagner ont montré qu'il en allait de même pour un corps supersimple [9]. Quant aux corps commutatifs stables infinis, on conjecture qu'ils n'ont pas d'extensions séparables. Scanlon a montré qu'un corps commutatif stable infini n'avait pas d'extension pseudo-radicale [11]. Wagner a adapté l'argument aux corps simples, montrant que ces derniers n'ont qu'un nombre fini d'extensions pseudo-radicales [7]. Etablir qu'un corps est commutatif procède généralement en deux étapes, la première étant de démontrer que le corps vu comme espace vectoriel sur son centre doit être de dimension finie, la seconde, que le centre ne peut avoir d'extensions gauches de degré fini. Concernant un corps stable, au moins pouvons nous montrer qu'en caractéristique positive, il est de dimension finie sur son centre. C'est aussi valable pour un corps simple.

1. Structures stables

Dans une théorie T donnée, une formule $f(x, y)$ a la *propriété de l'ordre* si elle ordonne totalement une suite infinie, i.e. s'il existe une suite infinie $a_1, a_2 \dots$ telle que

$$T \models f(a_i, a_j) \text{ si et seulement si } i < j$$

La formule f a la *propriété de l'ordre strict* si elle définit un ordre partiel ayant des chaines infinies, i.e. si f est une relation réflexive transitive et antisymétrique, et s'il existe une suite infine $a_1, a_2 \dots$ délément deux à deux distincts telle que

$$T \models \bigwedge_{i<j} f(a_i, a_j)$$

Si une formule a la propriété de l'ordre strict, elle a aussi la propriété de l'ordre.

Définition 1. Une théorie est *stable* si aucune formule n'y a la propriété de l'ordre. Une structure est *stable* si sa théorie l'est.

Nous renvoyons à [10] et [13] les lecteurs intéressés par les groupes stables. Nous rappelons seulement qu'à toute formule $f(x, y)$ dans un groupe sans la propriété d'ordre strict est associé un entier n, tel que toute chaîne décroissante de sous-groupes définis par des des formules $f(x, a_1), \dots, f(x, a_m)$ n'ait pas plus de n éléments. Qui plus est :

Sujets mathématiques dont il est question. 03C45, 03C60, 16K20.

Mots clefs. Corps, théories stables, théories simples.

Les résultats présentés ici forment une partie de la thèse de doctorat de l'auteur, préparée à Lyon sous la direction du professeur Wagner.

Fait 1. (Baldwin-Saxl [1]) *Dans un groupe stable, à toute formule $f(x,y)$ est associé un entier n, tel que l'intersection d'une famille quelconque de sous-groupes $H_1,\dots,H_m,\dots$ definis par des formules $f(x,a_1),\dots,f(x,a_m),\dots$ soit l'intersection de n d'entre eux.*

Il en résulte que dans un groupe stable, une chaîne strictement monotone de centralisateurs est finie.

Proposition 2. *Soit G un groupe sans propriété d'ordre strict, et h un homomorphisme de G dans lui-même. S'il y a une formule $f(x,y)$ telle que les images itérées de h soient définissables par des formules $f(x,a_i)$, alors G est égal au produit $\mathrm{Ker}h^n \cdot \mathrm{Im}h^n$ pour un certain entier n. En particulier, si h est injectif, il est surjectif.*

Démonstration. Comme les images itérées de h sont uniformément définissables, elles stationnent à un certain rang n. Remarquer que l'intersection $\mathrm{Ker}h^n \cap \mathrm{Im}h^n$ est réduite à zero pourvu que $\mathrm{Ker}h^n = \mathrm{Ker}h^{n+1}$. □

2. Corps stables

Théorème 3. *Un corps stable de caractéristique positive est de dimension finie sur son centre.*

Démonstration. Soit D ce corps, p sa caractéristique, a un élément hors du centre, et f_a l'application qui à un élément x du corps associe $x^a - x$.

(1) Les images et noyaux iterés de f stationnent : d'après le binôme de Newton

$$f_a^{p^n}(x) = \sum_{k=0}^{p^n} (-1)^{p^n-k} C_{p^n}^k x^{a^k} = x^{a^{p^n}} - x = f_{a^{p^n}}(x)$$

Il y a donc une sous-chaîne de la chaîne des images itérées de f qui est uniformément définissable : les images itérées stationnent par stabilité. Le même argument vaut pour la chaîne des noyaux.

(2) L'application f n'est pas surjective : si elle l'était, puisque le noyau n'est pas vide, la suite des noyaux itérés serait strictement croissante, ce qui est impossible.

(3) D est un espace vectoriel de dimension finie sur $C(a)$: d'après la proposition 2, il y a un entier m telle que

$$D = \mathrm{Ker}f^m + \mathrm{Im}f^m$$

Remarquer que la somme est directe puisque la chaîne des noyaux stationne. Soit H l'image de f^m ; quitte à augmenter m, on peut supposer le noyau de f^m égal à $C(a^m)$. Soit I une intersection minimale de translatés à gauche de H par des éléments non nuls de D ; c'est un idéal propre de D, donc nul. Cependant, d'après le fait 1, l'intersection est une intersection finie, disons de n translatés. D'après [4, Corollary 2 p. 49], la dimension de $C(a^m)$ sur $C(a)$ est celle de $Z(C(a^m))(a)$ sur $Z(C(a^m))$, donc H est un espace vectoriel sur $C(a)$ de codimension au plus m, et I est de codimension au plus $m \cdot n$.

(4) Pour conclure, soit $D > D_1 > \cdots > D_n > D_{n+1}$ une chaîne de centralisateurs, avec D_n non commutatif minimal. D_n existe d'après le fait 1. Le corps D est de dimension finie disons l sur D_{n+1}. D'après [4, corollaire 2 p. 49], le corps D est de dimension au plus l^2 sur son centre. □

Remarque 4. Le centre d'un corps stable infini est aussi infini. En caractéristique positive, il contient la clôture algébrique de $\mathbf{F}_p$ d'après [11] : tout élément d'ordre fini est dans le centre.

3. Corps simples

Nous ne définirons pas ici ce qu'est une théorie simple, mais renvoyons à [14] pour plus d'informations. Nous aurons simplement besoin des résultats suivants. Rappelons que deux sous-groupes d'un groupe donné sont *commensurables* si l'indice de leur intersection est fini dans chacun d'entre eux.

Fait 2. (Schlichting [12, 14]) *Soit un groupe G et $\mathfrak{H}$ une famille de sous-groupes uniformément commensurables. Il y a un sous-groupe N de G commensurable aux membres de $\mathfrak{H}$ et invariant sous l'action du groupe d'automorphismes de G laissant la famille $\mathfrak{H}$ globalement invariante. Si les membres de $\mathfrak{H}$ sont définissables, N l'est aussi.*

Fait 3. (Wagner [14]) *Dans un groupe simple, une chaîne décroissante d'intersections d'une famille $H_1, H_2 \dots$ de sous-groupes définis par les formules $f(x, a_1), f(x, a_2) \dots$ où $f(x, y)$ est une formule fixée, stationne à indice fini près.*

Remarque 5. Si $D_1 < D_2$ sont deux corps infinis, l'indice du groupe additif de D_1 dans D_2 est infini. En particulier, dans un corps simple, toute chaîne décroissante de centralisateurs stationne.

Fait 4. *Dans une structure simple, aucune formule n'a la propriété de l'ordre strict.*

Théorème 6. *Un corps simple de caractéristique positive est de dimension finie sur son centre.*

Démonstration. Soit D ce corps, p sa caractéristique, a un élément hors du centre, et f_a l'application qui à x associe $x^a - x$.

(1) Les images et noyaux iterés de f stationnent et f n'est pas surjective : comme dans le cas stable d'après le fait 4.

(2) Le centralisateur de a est infini : on ne perd rien à supposer l'ordre de a fini, et même un entier premier, disons q. D'après [5, lemme 3.1.1], il y a un élément x d'ordre infini tel que xax^{-1} soit égal à a^i mais pas à a. Le petit théorème de Fermat affirme que i^{q-1} est congru à un modulo q, donc x^{q-1} et a commutent : $C(a)$ est infini puisqu'il contient x^{q-1}.

(3) D est un espace vectoriel sur $C(a)$ de dimension finie : d'après la proposition 2,

$$D = \mathrm{Ker} f^m + \mathrm{Im} f^m$$

Soit H l'image de f^m, et supposons son noyau égal à $C(a^m)$. Soit N une intersection minimale à indice fini près de translatés à gauche non nuls de H ; d'après le fait 3, c'est une intersection finie, de taille n disons. Considérons l'ensemble $\mathfrak{H}$ des translatés à gauche de N par des éléments non nuls. C'est une famille invariante et uniformément commensurable ; d'après le fait 2, il existe un sous-groupe additif I invariant et commensurable à N. C'est donc un idéal propre, réduit à zéro : N est fini. Etant un espace vectoriel à droite sur $C(a)$, N est réduit à zéro. Nous finissons comme dans le cas stable, en concluant que D est de dimension finie sur $C(a)$, et donc sur son centre d'après la remarque 5. □

Remarquons qu'un corps gauche, au moins comme nous le traitons ici, n'est pas beacoup plus qu'un corps muni d'un ensemble de morphismes de corps : les conjugaisons. Le théorème précédent a donc naturellement l'analogue suivant pour un corps aux différences finies. Rappelons aussi que dans un corps superstable, tout morphisme de corps est soit trivial, soit possède un nombre fini de points fixes [6].

Proposition 7. *Soit K un corps, et f un homomorphisme du corps K. Soit F l'ensemble des points fixes de f, et P un polynôme scindé sur F dont on suppose les composées itérées $P(f)^n$ uniformément définissables. Si la théorie de K est* *simple, alors soit K est une extension algébrique de F de degré fini, soit l'image de $P(f)$ est d'indice fini dans K^+.*

Démonstration. Supposons K infini. Soit $\prod(X - a_i)^{n_i}$ une décomposition du polynôme f. Remarquez que le noyau et l'image de $P(f)$ sont tous deux des espaces vectoriels sur F, et que le noyau se décompose en la somme $\bigoplus_i \mathrm{Ker}(f - a_i \cdot id)^{n_i}$, chacun des facteurs $\mathrm{Ker}(f - a_i \cdot id)^{n_i}$ étant de dimension au plus n_i sur F. D'après la proposition 2, le corps K est égal à $\mathrm{Ker}P(f)^m + \mathrm{Im}P(f)^m$. Soit H l'image de $P(f)^m$, et N une intersection minimale à indice fini près de translatés de H par des éléments non nuls. Remarquez que si N est fini, il y a une intersection minimale tout court qui est un idéal propre, réduit à zéro. D'après le fait 3, l'intersection N est une intersection finie, disons de taille n. Soit $\mathfrak{H}$ l'ensemble des translatés non nuls de N. D'après le fait 2, il existe un sous-groupe additif de K invariant et commensurable à N. Appelons le I : c'est un idéal de K. Si I est K tout entier, l'image de $P(f)$ est d'indice fini dans K^+ ; pour peu que F soit infini, l'application $P(f)$ est surjective puisque son image est un espace vectoriel sur F. Dans le cas contraire, I est réduit à zéro, ainsi que N. Mais H est un espace vectoriel sur F de codimension finie disons r, donc N est de codimension au plus $r \cdot n$. □

Références

[1] John Baldwin et Jan Saxl, *Logical stability in group theory*, Journal of the Australian Mathematical Society **21**, 3, 267–276, 1976.

[2] Gregory Cherlin, *Super stable division rings*, Logic Colloquium '77, North Holland, 99–111, 1978.

[3] Gregory Cherlin et Saharon Shelah, *Superstable fields and groups*, Annals of Mathematical Logic **18**, 3, 227–270, 1980.

[4] Paul M. Cohn, Skew fields constructions, Cambridge University Press, 1977.

[5] Israel N. Herstein, Noncommutative Rings, The Mathematical Association of America, quatrième édition, 1996.

[6] Ehud Hrushovski, *On superstable fields with automorphisms.* The model theory of groups, Notre Dame Math. Lectures, 11, 186–191, 1989.

[7] Itay Kaplan, Thomas Scanlon et Frank O. Wagner, *Artin-Schreier extensions in dependent and simple fields*, à paraître.

[8] Angus Macintyre, *On ω_1-categorical theories of fields*, Fundamenta Mathematicae **71**, 1, 1–25, 1971.

[9] Anand Pillay, Thomas Scanlon et Frank O. Wagner, *Supersimple fields and division rings*, Mathematical Research Letters **5**, 473–483, 1998.

[10] Bruno Poizat, *Groupes Stables*, Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah, 1987.

[11] Thomas Scanlon, *Infinite stable fields are Artin-Schreier closed*, non publié, 1999.

[12] Günter Schlichting, *Operationen mit periodischen Stabilisatoren*, Archiv der Matematik **34**, 97–99, Basel, 1980.

[13] Frank O. Wagner, Stable groups, Cambridge University Press, 1997.

[14] Frank O. Wagner, Simple Theories, Mathematics and its Applications, 503. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

Adresse postale , Cédric Milliet: Université de Lyon, Université Lyon 1, Institut Camille Jordan UMR 5208 CNRS, 43 boulevard du 11 novembre 1918,
69622 Villeurbanne Cedex, France
E-mail address, Cédric Milliet: `milliet@math.univ-lyon1.fr`